

最优传输的理论与计算

Minkowski-Alexandrov 凸几何理论



顾险峰
纽约州立大学石溪分校计算机科学系



图: 教课书《最优传输理论和计算》.

Minkowski 问题

给定 k 单位向量 $n_1, \dots, n_k$ 不包含在 $\mathbb{R}^n$ 的半空间内,
 $A_1, \dots, A_k > 0$, 满足

$$\sum_{i=1}^k A_i \mathbf{n}_i = \mathbf{0},$$

找到一个紧的凸多面体 P , 具有
 k 个余维数为 1 的面
 $F_1, \dots, F_k$, 满足 F_i 的体积等于
 A_i , F_i 的法向量等于 $\mathbf{n}_i$.

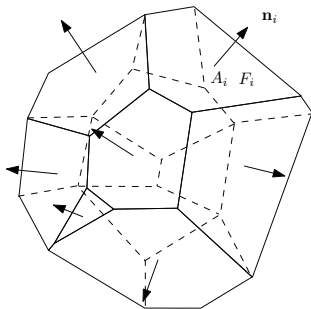


图: Minkowski 问题。

定理 (Minkowski)

凸多面体 P 存在，并且直至相差一个平移唯一。

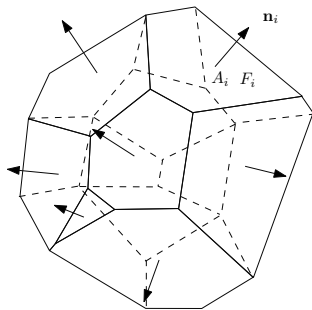


图: Minkowski 问题。

定理 (Alexandrov 1950)

Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧凸区域,
 $p_1, \dots, p_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中不同的向量,
 $A_1, \dots, A_k > 0$, 满足
 $\sum A_i = \text{vol}(\Omega)$, 那么存在凸的
 分片线性函数, 直至相差一个常
 数唯一,

$$u(x) = \max_{i=1}^k \{ \langle p_i, x \rangle - h_i \},$$

满足

$$\text{vol}(W_i) = A_i, \quad W_i = \{x | \nabla u(x) = p_i\}.$$

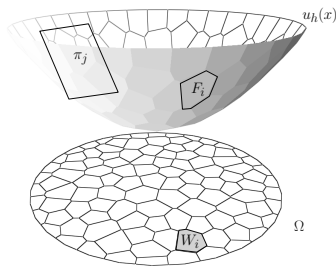


图: Alexandrov 定理.

Alexandrov 定理等价于半离散最优传输映射。令 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是紧凸集，测度 μ 绝对连续，目标测度为 Dirac 测度之和，

$$\nu = \sum_{i=1}^n \nu_i \delta(y - y_i),$$

满足条件 $\mu(\Omega) = \sum_{i=1}^n \nu_i$ ，传输代价函数为欧氏距离平方 $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$ ，则存在唯一的最优传输映射 $T: (\Omega, \mu) \rightarrow (\{y_i\}_{i=1}^n, \nu)$ ， $T = \nabla u$ ，这里 Briener 势能函数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 为分片线性凸函数， u 并不唯一，彼此相差一个常数：

$$u(x) = \max_{i=1}^n \{\langle x, y_i \rangle - h_i\},$$

u 的图是支撑平面 $\langle x, y_i \rangle = h_i$ 的上包络。

Brenier 势能函数投影诱导 $\mathbb{R}^d$ 的一个胞腔分解

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n W_i(u), \quad W_i(u) = \{x \in \Omega \mid \nabla u = y_i\}.$$

最优传输映射将每个胞腔 $W_i(u)$ 映到目标点 y_i , $T: W_i(u) \mapsto y_i$;
Legendre 对偶 u^* 的图是支撑平面对偶点 $\{(y_i, h_i)\}_{i=1}^n$ 的凸包。

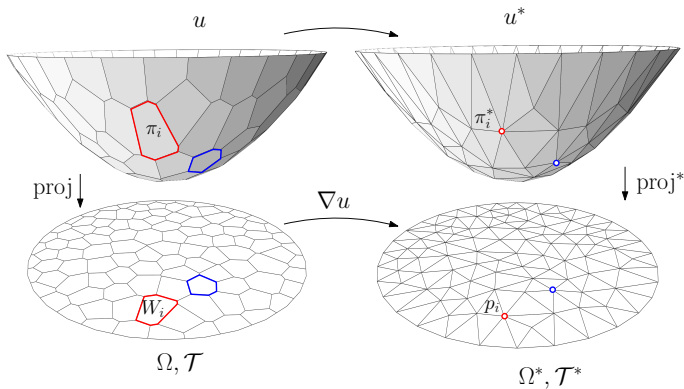


图: 离散最优传输映射 (从左到右): 把 W_i 映到 p_i . 离散的 Monge-Ampère 方程 (从右到左): $\mu_\sigma(W_i)$ 是 p_i 的离散 Hesse 行列式.

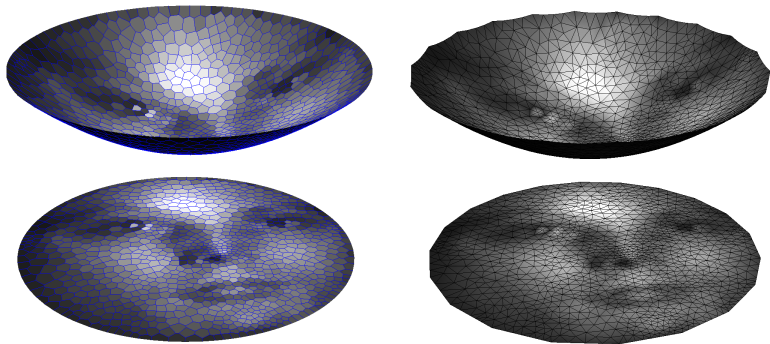


图: 离散最优传输映射。

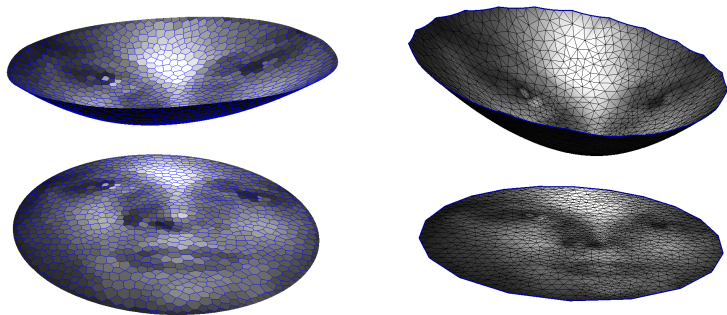


图: 离散最优传输映射。

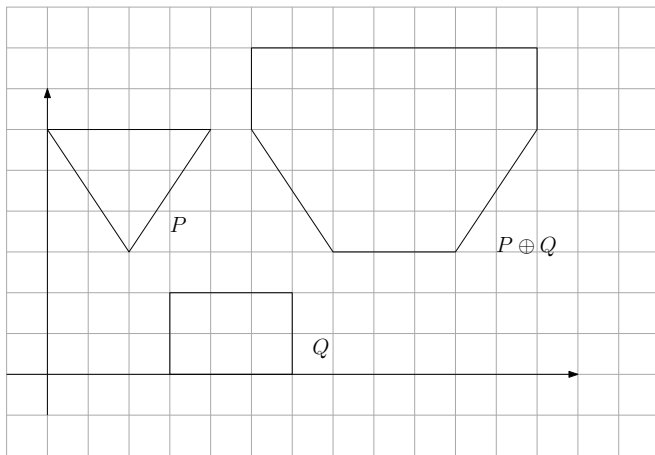


图: Minkowski 和 $P \oplus Q$.

定义 (Minkowski 和)

给定两个集合 $P, Q \subset \mathbb{R}^d$, 它们的 Minkowski 和定义为

$$P \oplus Q := \{p + q : p \in P \text{ 且 } q \in Q\}. \quad \square$$

Minkowski 和可以重写为

$$P \oplus Q = \bigcup_{q \in Q} P \oplus \{q\}.$$

定义 (Minkowski 扩张)

给定一个集合 $P \subset \mathbb{R}^d$ 和常数 $s \geq 0$, 以 s 为因子的 Minkowski 扩张 (dilation) 定义为

$$sP := \{sp : p \in P\}. \quad \square$$

定理 (Minkowski 和的多项式性质)

令 P 和 Q 为 $\mathbb{R}^3$ 上的凸体, 线性组合 $sP \oplus tQ$ 的体积是非负实数 s 和 t 的三次多项式,

$$V(sP \oplus tQ) = V(P)s^3 + 3V(P, P, Q)s^2t + 3V(P, Q, Q)st^2 + V(Q)t^3,$$

这里 $V(P, P, Q)$ 和 $V(P, Q, Q)$ 被称为混合体积. □

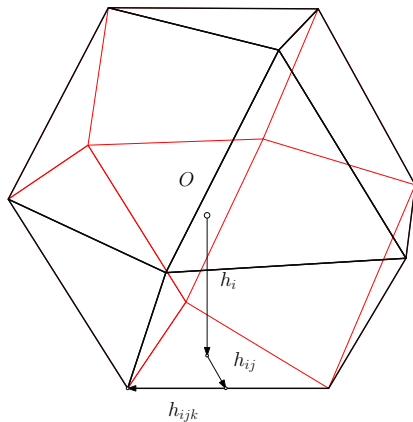


图: 具有高度 h_i, h_{ij}, h_{ijk} 的凸多面体.

证明.

设 $X = sP_1 \oplus tP_2$, P_1 和 P_2 具有相同的组合结构. X 的体积为

$$\begin{aligned}
 V(X) &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n h_i A(f_i) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n h_i \frac{1}{2} \sum_j h_{ij} L(e_{ij}) \\
 &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n h_i \frac{1}{2} \sum_j h_{ij} \sum_{k=1}^2 h_{ijk} = \frac{1}{6} \sum_{i,j,k} h_i h_{ij} h_{ijk} \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{i,j,k} (sh_i^{(1)} + th_i^{(2)})(sh_{ij}^{(1)} + th_{ij}^{(2)})(sh_{ijk}^{(1)} + th_{ijk}^{(2)}) \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{i,j,k} (h_i^{(1)} h_{ij}^{(1)} h_{ijk}^{(1)} s^3 + h_i^{(1)} h_{ij}^{(1)} h_{ijk}^{(2)} s^2 t \\
 &\quad + h_i^{(1)} h_{ij}^{(2)} h_{ijk}^{(2)} s t^2 + h_i^{(2)} h_{ij}^{(2)} h_{ijk}^{(2)} t^3),
 \end{aligned}$$

引理 (体积导数)

令 P 是一个凸多面体, 假设其第 i 个面 f_i 的法向为 n_i , 支撑距离 h_i , 则

$$P := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle n_i, x \rangle \leq h_i, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

设 f_i 的体积为 A_i , 则

$$\frac{\partial V(\mathbf{h})}{\partial h_i} = A_i. \quad \blacklozenge \tag{1}$$

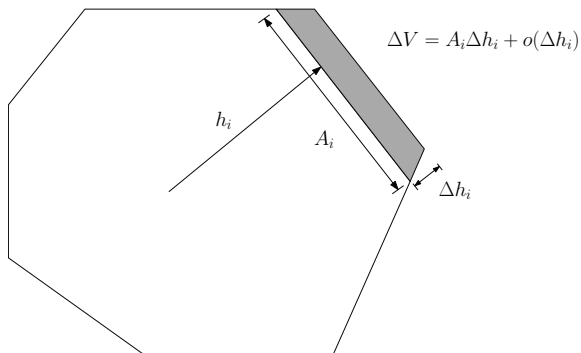


图: 凸多面体体积导数 $\partial/\partial h_i = A_i$.

证明.

如前页图所示, 如果我们把支撑距离从 h_i 增大到 $h_i + \Delta h_i$, 体积增量是厚度 Δh_i 乘以面积 A_i 再加上高阶项,

$$\Delta V = A_i \Delta h_i + o(\Delta h_i),$$

因此

$$\frac{\partial V}{\partial h_i} = A_i.$$



由于 Minkowski 和趋向于“圆滑化”所添加的形状, 因此 Minkowski 和的体积超过了所添加形状的体积和.

定义 (位似)

两个多面体 A 和 B 是位似的, 如果它们的形状是相似的, 并且所处的位置和定向也是相似的, 这意味着存在一个平移和扩张使得

$$A = rB \oplus \{x\}. \quad \square$$

定理 (Brunn-Minkowski 不等式)

令真子集 $A, B \subset \mathbb{R}^d$ 为凸集, 并且 $0 \leq \lambda \leq 1$, 则

$$V((1 - \lambda)A \oplus \lambda B)^{\frac{1}{d}} \geq (1 - \lambda) V(A)^{\frac{1}{d}} + \lambda V(B)^{\frac{1}{d}}, \quad (2)$$

等号成立当且仅当 A 和 B 是位似的. □

定理 (Minkowski 不等式)

假设 $\mathbb{R}^3$ 中有界凸多面体 P 和 P' , 带有相同的法线 $\{v_i\}_{i=1}^n$. 令 A_i, h_i 和 A'_i, h'_i 表示沿着 v_i 方向上的面积和支撑距离, 某些面积可能为 0. 则混合体积 $V(P, P', P')$ 满足

$$V(P, P', P') = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n h_i A'_i \geq V(P)^{1/3} V(P')^{2/3}. \quad (3)$$

如果等式成立, 则 P 和 $P' = cP + a$ 相差一个位似变换. □

证明.

$$\begin{aligned} V((1-t)A \oplus tB) &= V(A)(1-t)^3 + 3V(A, A, B)(1-t)^2t \\ &\quad + 3V(A, B, B)(1-t)t^2 + V(B)t^3, \end{aligned}$$

由 Brunn-Minkowski 不等式, $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是非负下凹函数,

$$f(t) = V((1-t)A \oplus tB)^{\frac{1}{3}} - (1-t)V(A)^{\frac{1}{3}} - tV(B)^{\frac{1}{3}}.$$

在 $t=0$ 处微分, 由

$$0 \leq \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=0} = V(A)^{-\frac{2}{3}}[-V(A) + V(A, A, B)] + V(A)^{\frac{1}{3}} - V(B)^{\frac{1}{3}}$$

得出结果. 等式成立蕴含 $f(t) \equiv 0$, 由 Brunn-Minkowski 定理, A 、 B 位似. $\square$

定理 (Minkowski 多面体的唯一性)

假设 $\mathbb{R}^3$ 中两个有界凸多面体 P 和 P' , 其相应外法线 $v_i = v'_i$ 和相应面积 $A_i = A'_i > 0$ 重合, 则 P' 和 P 相差一个平移. $\square$

证明.

因为 $A_i = A'_i$, 则混合体积

$$V(P, P', P') = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n h_i A'_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n h_i A_i = V(P).$$

由 Minkowski 不等式,

$$V(P) = V(P, P', P') \geq V(P)^{1/3} V(P')^{2/3},$$

有 $V(P) \geq V(P')$, 同理得到 $V(P') \geq V(P)$. 因此 $V(P) = V(P')$
且 Minkowski 不等式中的等式成立, 因此 P 和 P' 相差一个位似
变换. 体积相同, $c = 1$, P 和 P' 相差一个平移. $\square$

令 Δ^n 是一个 n 维单纯形, 此单纯形具有 $n+1$ 个顶点 $v_1, \dots, v_{n+1}$ 和 $n+1$ 个面 $f_1, \dots, f_{n+1}$. 我们将顶点和面进行编号, 使得 f_k 是顶点 v_k 正对的面, $v_k \notin f_k$. 我们同样选择 $n+1$ 种不同的颜色 $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$, 并用第 k 种颜色对 v_k 进行染色. 现在我们考虑 Δ^n 的一个三角剖分 $\mathcal{T}$. 假设三角剖分中的所有顶点都被染色, 使得在每个面上, 我们只使用该面上 n 个 Δ^n 的顶点的颜色, 亦即我们不使用第 k 种颜色对面 f_k 上的新顶点染色. 这种染色被称为一个 Sperner 染色, 下图显示了一个 Sperner 染色的例子. 如果存在三角剖分的一个 n 维单纯形 $\sigma \in \mathcal{T}$, 且 σ 的所有 $n+1$ 顶点染色都不同, 则 σ 被称为关于颜色 $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ 的一个全色单纯形.

定理 (Sperner 引理)

给定 Δ^n 的一个三角剖分 $\mathcal{T}$, 任给一个 *Sperner* 染色, 则总存在奇数个全色单纯形.

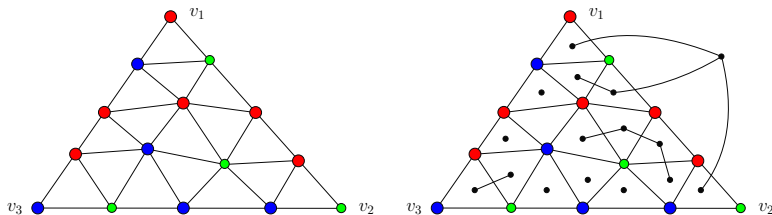


图: Sperner 染色, 提供了一种计算方法.

基于 Sperner 引理, 我们可以证明闭单位球体 $B^n \subset \mathbb{R}^n$ 的不动点定理, 这个定理最早由 Brouwer 提出.

定理 (Brouwer 不动点)

单位闭球的任意连续自映射 $f: B^n \rightarrow B^n$ 都存在一个不动点: 即有一个点 $x \in B^n$ 具有性质 $f(x) = x$. □

由 Brouwer 不动点定理, 我们得到区域不变性定理.

定理 (区域不变性)

设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个开子集. 若 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续单射, 则 $f(U)$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集. □

定理 (Alexandrov 映射引理)

假设 $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是 d 维流形之间的一个映射, 且满足下列条件:

- ▶ $\mathcal{B}$ 的每个连通分支都包含 $\mathcal{A}$ 的像点;
- ▶ φ 是单射;
- ▶ φ 是连续的;
- ▶ φ 具有闭图 (*closed graph*): 如果 $\{B_j\} \subset \mathcal{B}$ 是一个像点的收敛序列, 即对任意 j , 都存在某个 $A_j \in \mathcal{A}$, 使得 $B_j = \varphi(A_j)$; 同时当 $j \rightarrow \infty$ 时, 序列 $\{B_j\}$ 收敛于 B . 那么存在 $A \in \mathcal{A}$, 使得 $\varphi(A) = B$; 并且存在 $\{A_i\}$ 的一个子序列 $\{A_{i_k}\}$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\{A_{i_k}\}$ 收敛于 A .

那么 φ 是满射, 即 $\varphi(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.



定义 (半球条件)

法向量集合不能被任何封闭半球 (hemisphere) 所包含. 等价地, 法向量的正锥 (positive cone)

$$_+(\mathcal{N}) = \left\{ X = \sum_{i=1}^n \theta_i v_i : \theta_i \geq 0 \right\}$$

覆盖整个空间 $\mathbb{R}^d$.



举例而言, 否则, 存在一个单位向量 w , 使得

$$\langle v_i, w \rangle \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

多面体在负的 w 方向不会封闭, 会出现一个体积无穷大的面.

定理 (离散 Minkowski 问题解的存在性)

假设有 $n \geq d+1$ 个不同的单位向量 $\mathcal{N} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $v_i \in \mathbb{S}^{d-1}$ 满足半球条件, 正实数 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 满足以下条件

$$\sum_{i=1}^n \beta_i v_i = 0. \quad (4)$$

则存在一个凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$, P 具有 n 个面, 对所有的 $k = 1, \dots, n$, 对应的第 k 个面的外单位法向量等于 $v_i \in \mathcal{N}$, 体积等于 β_k . 这样的凸多面体彼此相差一个平移. $\square$

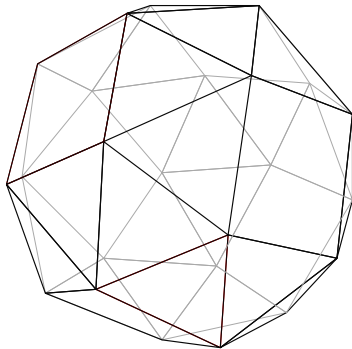


图: 凸多面体.

凸多面体 P 的支撑平面表示为 $\langle x, v_i \rangle = h_i$, 其中 h_i 是它的支撑距离. 多面体 P 可以表示为半空间的交集,

$$P = \bigcap_{i=1}^n \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \langle x, v_i \rangle \leq h_i \right\}.$$

固定所有的法向量, 我们可以用 $P(\mathbf{h})$ 来表示如此定义的多面体, 其中 $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$.

设多面体相应面的体积为 $(A_1, \dots, A_n)$. 如果我们将多面体投影到超平面 $x_k = 0$ 上, 则因为 P 是封闭的, 投影的有向总体积为 0. 这意味着

$$\sum_{i=1}^n A_i \langle v_i, e_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n A_i v_i, e_k \right\rangle = 0.$$

等式对所有的 $k = 1, 2, \dots, n$ 都成立, 因此我们得到

$$\sum_{i=1}^n A_i v_i = 0.$$

我们定义可容许高度向量空间. 首先, 我们定义 $\mathcal{H}$ 空间为

$$\mathcal{H} := \{(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n : A_k(\mathbf{h}) > 0 \text{ 并且 } h_k > 0, k = 1, \dots, n\}.$$

给定一个多面体 $P(\mathbf{h})$, 如果我们将它平移, 平移向量为 $w \in \mathbb{R}^d$, 那么多面体 $P \oplus w$ 的形状是不变的. 由此, 我们定义一个等价关系,

$$\mathbf{h}_1 \sim \mathbf{h}_2 \in \mathcal{H} \iff \exists w \in \mathbb{R}^d, \text{ s.t. } \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2 = (\langle w, v_1 \rangle, \langle w, v_2 \rangle, \dots, \langle w, v_n \rangle).$$

所以可容许高度向量空间由 $\mathcal{H} / \sim$ 给定.

证明.

让我们为高度向量定义一个特殊的空间,

$$\Omega := \mathcal{H} / \sim \bigcap \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : h_1\beta_1 + h_2\beta_2 + \cdots + h_n\beta_n = 1\}.$$

容易看出

$$\frac{1}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n} (1, 1, \dots, 1) \in \Omega,$$

Ω 是非空的, 而且它是两个凸集之交, 所以 Ω 也是凸的. 我们考虑以下最优问题: 在空间 Ω 中极大化体积 $u(\mathbf{h})$,

$$\max_{\mathbf{h} \in \Omega} u(\mathbf{h}).$$



证明.

用 Lagrange 乘子法,

$$\max_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}/\sim} \left\{ u(\mathbf{h}) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n \beta_i h_i - 1 \right) \right\},$$

可以证明最优点是 Ω 的内点而不在边界 $\partial\Omega$ 上. 假设体积在内点 $\mathbf{h}^* \in \Omega$ 上达到极大, 则在 $\mathbf{h}^*$ 我们有

$$\frac{\partial u}{\partial h_i}(\mathbf{h}^*) - \lambda \beta_i = A_i(\mathbf{h}^*) - \lambda \beta_i = 0.$$

然后我们把整个多面体放大 $\lambda^{-\frac{1}{d-1}}$ 倍, 就得到期望的结果. $\square$

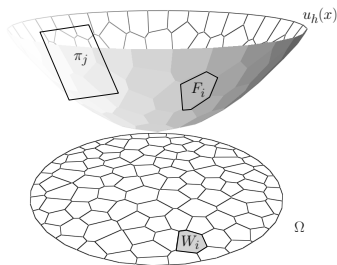


图: Alexandrov 定理.

每个面 F_i 的支撑超平面为 $\pi_i(x) = \langle x, p_i \rangle - h_i$, 凸多面体等于超平面的上包络

$$P(\mathbf{h}) = (\pi_1(\mathbf{h}), \pi_2(\mathbf{h}), \dots, \pi_n(\mathbf{h})).$$

$P(\mathbf{h})$ 可以表示成一个分片线性凸函数的图, $u_{\mathbf{h}} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u_{\mathbf{h}}(x) := \max_{1 \leq i \leq n} \{\pi_i(\mathbf{h}, x)\}. \quad (5)$$

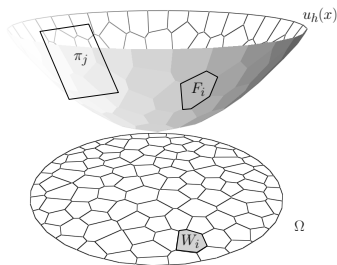


图: Alexandrov 定理.

$P(\mathbf{h})$ 向 $\mathbb{R}^d$ 投影, 得胞腔分解,

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{1 \leq i \leq n} W_i(\mathbf{h}).$$

F_i 对应着一个胞腔 $W_i(\mathbf{h})$,

$$W_i(\mathbf{h}) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \nabla u_{\mathbf{h}}(x) = p_i\}.$$

假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是凸集, 则 $P(\mathbf{h})$ 的投影也构成 Ω 的一个胞腔分解, 每个胞腔的体积记为 $w_i(\mathbf{h})$,

$$w_i(\mathbf{h}) := \text{vol}(W_i(\mathbf{h} \cap \Omega)). \quad (6)$$

Alexandrov 定理有多种证明:

1. 最优传输理论中的 Brenier 定理;
2. 凸几何中的 Alexandrov 映射引理;
3. 几何变分法;

证明.

令 μ 为定义在 Ω 上的 Lebesgue 测度, $\nu = \sum_{i=1}^n A_i \delta(y - p_i)$, 令传输代价函数为欧氏距离的平方, $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$, 由 Brenier 定理, 存在一个凸函数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, 其梯度映射 $\nabla u: \Omega \rightarrow \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 给出了最优传输映射. 凸函数 u 几乎处处 C^2 , 诱导了 Ω 的一个胞腔分解:

$$\Omega = \bigcup_{1 \leq i \leq n} W_i = \bigcup_{1 \leq i \leq n} (\nabla u)^{-1}(p_i).$$

因此在每一个胞腔 W_i 上, Brenier 势能函数的梯度为常数, 必为线性函数 $\langle p_i, x \rangle - h_i$, Brenier 势能函数为分片线性函数, 即 $u(x) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\langle p_i, x \rangle - h_i\}$. 由最优传输映射的唯一性, 高度向量相差一个常数. $\square$

证明.

第二个证明是基于 Alexandrov 映射引理。我们构造可容许高度向量空间

$$\mathcal{A} := \{\mathbf{h} : w_i(\mathbf{h}) > 0, i = 1, 2, \dots, n\} \cap \left\{ \mathbf{h} : \sum_{i=1}^n h_i = 0 \right\}$$

和可容许体积空间

$$\mathcal{B} := \left\{ \mathbf{A} : \sum_{i=1}^n A_i = \text{vol}(\Omega), \quad A_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

则 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都是 $n-1$ 维流形. 映射 $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 将高度向量 $\mathbf{h}$ 映到凸多面体 $P(\mathbf{h})$, 再得到余维数为 1 面的体积向量 $\mathbf{A}$. 我们下面验证 φ 满足 Alexandrov 映射引理的 4 个条件. $\square$

证明.

条件 1. 不失一般性, 我们可以通过平移、缩放使得 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \Omega$, 选择

$$h_i = \frac{1}{2} \langle p_i, p_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则 $P(h)$ 的投影是经典的 Voronoi 图, 每个胞腔的内部非空, 因此

$$\mathbf{h}_0 := \left(\frac{1}{2}|p_1|^2, \frac{1}{2}|p_2|^2, \dots, \frac{1}{2}|p_n|^2 \right) \in \mathcal{A},$$

$$\varphi(\mathbf{h}_0) \in \mathcal{B}.$$



证明.

条件 2. 假设存在 $\mathbf{h}_1$ 和 $\mathbf{h}_2$, 满足 $\varphi(\mathbf{h}_1) = \varphi(\mathbf{h}_2) = (A_1, A_2, \dots, A_n)$. 构造 Minkowski 和 $(1 - \lambda)P(\mathbf{h}_1) \oplus \lambda P(\mathbf{h}_2)$, 则其投影为 $(1 - \lambda)W_i(\mathbf{h}_1) \oplus \lambda W_i(\mathbf{h}_2)$, 由 Brunn-Minkowski 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} ((1 - \lambda)W_i(\mathbf{h}_1) \oplus \lambda W_i(\mathbf{h}_2))^{\frac{1}{d}} \\ \geq (1 - \lambda)(W_i(\mathbf{h}_1))^{\frac{1}{d}} + \lambda(W_i(\mathbf{h}_2))^{\frac{1}{d}} = A_i^{\frac{1}{d}} \end{aligned}$$

并且

$$\sum_{i=1}^n ((1 - \lambda)W_i(\mathbf{h}_1) \oplus \lambda W_i(\mathbf{h}_2)) = \sum_{i=1}^n A_i,$$

因此, 对于所有的 i 等号都成立.



证明.

因此胞腔 $W_i(\mathbf{h}_1)$ 和 $W_i(\mathbf{h}_2)$ 彼此相位似, 又因为相应的体积相等, 因此彼此相差一个平移. 又因为邻接条件, 两个胞腔分解相差一个平移. 考虑到 Ω 固定, 边界胞腔体积相同, 则两个胞腔分解重合, 由此得到 $P(\mathbf{h}_1)$ 和 $P(\mathbf{h}_2)$ 相差一个垂直平移. 最后由高度向量的归一化条件, 我们得到 $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2$. 由此得到映射 φ 是单射. □

证明.

条件 3. 由构造方法, 我们可以直接证明投影体积 $w_i(\mathbf{h})$ 是高度向量的 d 次多项式, 由此映射 $\varphi(\mathbf{h}) = \mathbf{A}(\mathbf{h})$ 是连续映射. $\square$

证明.

条件 4. 如果存在一个序列 $\{\mathbf{h}_i\} \subset \mathcal{A}$, 其像为 $\{\mathbf{A}_i\} \subset \mathcal{B}$, $\varphi(\mathbf{h}_i) = \mathbf{A}_i$. 同时当 $j \rightarrow \infty$ 时, 序列 $\{\mathbf{A}_j\}$ 收敛于 $\mathbf{A}$. $\mathcal{A}$ 中的归一化条件 $\sum_{i=1}^n h_i = 0$ 可以等价地修改为 $h_1 = 0$, 那么对于任意的支持平面 $\pi_k(\mathbf{h})$, $\pi_1(\mathbf{h})$ 和 $\pi_k(\mathbf{h})$ 交线的投影落在紧集 $\bar{\Omega}$ 内, 故 h_k 上下有界, $h_k \in [\alpha_k, \beta_k]$. 因此我们得到 $\mathcal{A}$ 是有界的,

$$\mathcal{A} \subset \{0\} \times [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \cdots \times [\alpha_n, \beta_n].$$

因此序列 $\{\mathbf{h}_i\}$ 存在收敛子列 $\{\mathbf{h}_{n_k}\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{h}_{n_k} = \mathbf{h}$, 于是我们有

$$\mathbf{A} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{h}_{n_k}) = \varphi(\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{h}_{n_k}) = \varphi(\mathbf{h}),$$

这就证明了闭图像条件.

由 Alexandrov 映射引理, 映射 $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是满射, 即拓扑同胚. 这就证明了 Alexandrov 多面体的存在性和唯一性定理. $\square$

更多的信息，请联系 gu@cs.stonybrook.edu

谢谢!

最优传输的理论及计算

球面最优传输理论



顾险峰

纽约州立大学石溪分校计算机科学系



图: 教课书《最优传输理论和计算》.

- ▶ 在深度学习之前，我们通过微分方程来理解世界；
- ▶ 在深度学习之后，我们通过概率统计来理解世界；
- ▶ 在最优传输理论中，我们通过微分方程来理解概率统计。

最优传输的几何观点口诀：

- ▶ 代价变换支撑
- ▶ 支撑包络势能
- ▶ 势能微分映射
- ▶ 映射对偶凸壳

Minkowski 问题

给定 k 单位向量 $n_1, \dots, n_k$ 不包含在 $\mathbb{R}^n$ 的半空间内,
 $A_1, \dots, A_k > 0$, 满足

$$\sum_{i=1}^k A_i \mathbf{n}_i = \mathbf{0},$$

找到一个紧的凸多面体 P , 具有
 k 个余维数为 1 的面
 $F_1, \dots, F_k$, 满足 F_i 的体积等于
 A_i , F_i 的法向量等于 $\mathbf{n}_i$.

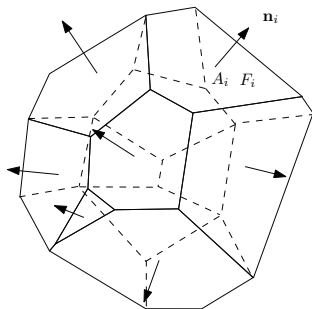


图: Minkowski 问题。

定理 (Minkowski)

凸多面体 P 存在，并且直至相差一个平移唯一。

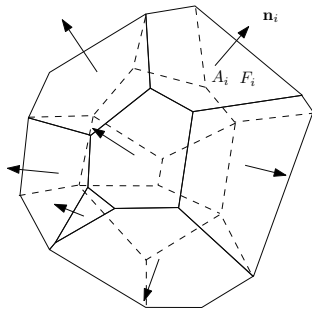


图: Minkowski 问题。

定理 (Alexandrov 1950)

Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧凸区域,
 $p_1, \dots, p_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中不同的向量,
 $A_1, \dots, A_k > 0$, 满足
 $\sum A_i = \text{vol}(\Omega)$, 那么存在凸的
 分片线性函数, 直至相差一个常
 数唯一,

$$u(x) = \max_{i=1}^k \langle p_i, x \rangle - h_i,$$

满足

$$\text{vol}(W_i) = A_i, \quad W_i = \{x | u(x) = p_i\}.$$

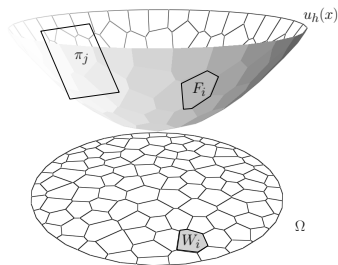


图: Alexandrov 定理.

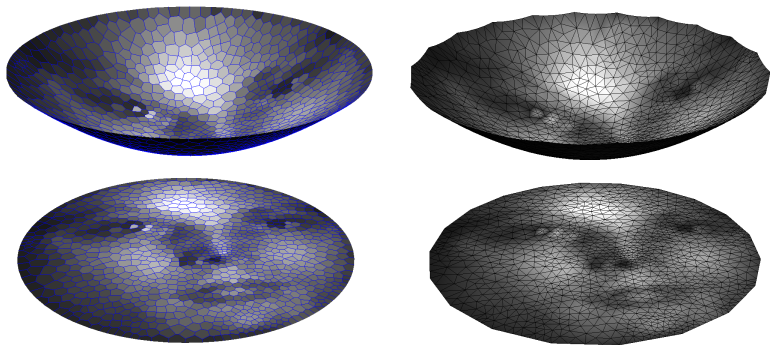


图: 离散最优传输映射。

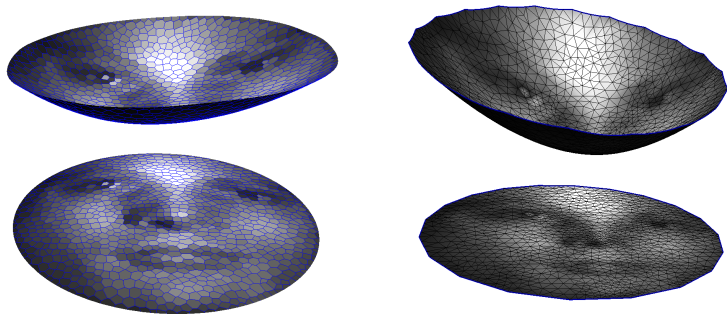
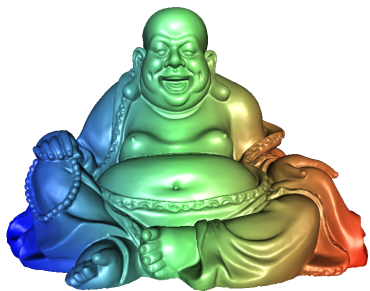
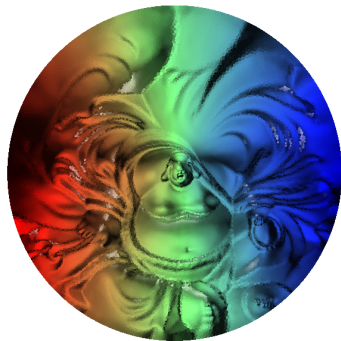


图: 离散最优传输映射。

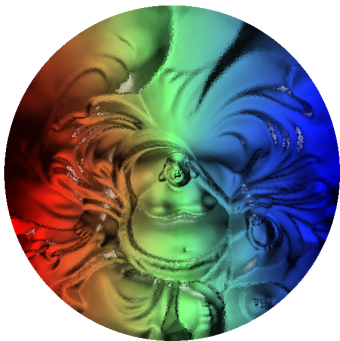


欢喜佛曲面

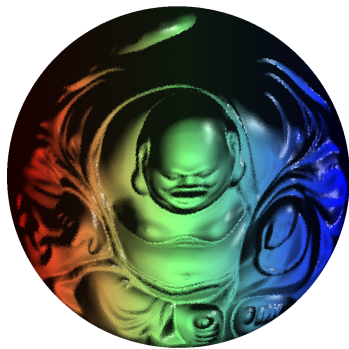


黎曼映照

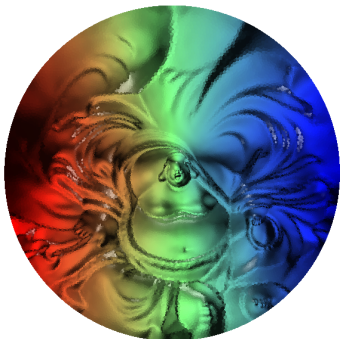
图: 共形映射。



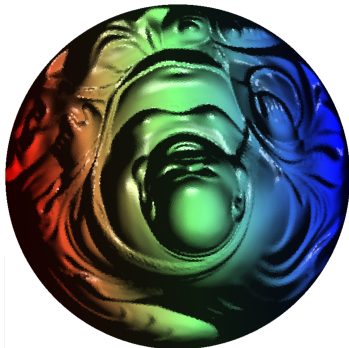
黎曼映照



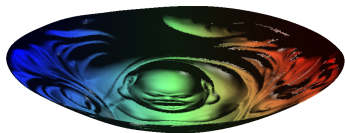
最优传输映射



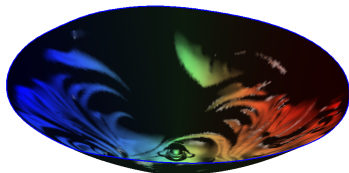
黎曼映照



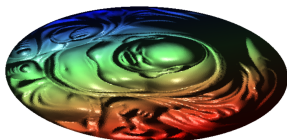
最差传输映射



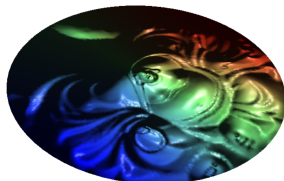
Brenier 势能



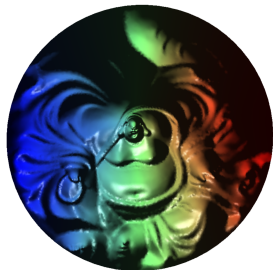
Legendre 对偶



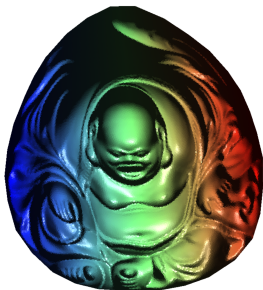
Brenier 势能



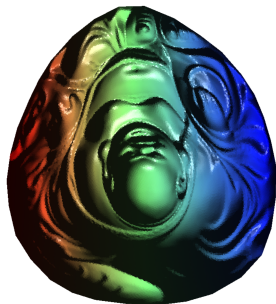
Legendre 对偶



共形映射



最优映射



最差映射

令 $K \subset \mathbb{R}^d$ 为一个包含原点的有界开凸域, 用极坐标将边界 ∂K 参数化:

$$\partial K = \{\rho(x)x : x \in \mathbb{S}^{d-1}, \rho : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^+\}.$$

定义 (次法向量映射)

对任意一个点 $z \in \partial K$, 次法向量映射将点 z 映射到单位球面上的闭集, $z \mapsto N_K(z)$,

$$N_K(z) := \left\{ y \in \mathbb{S}^{d-1} : K \subset \{w : \langle y, w - z \rangle \leq 0\} \right\}. \quad \blacklozenge \quad (1)$$

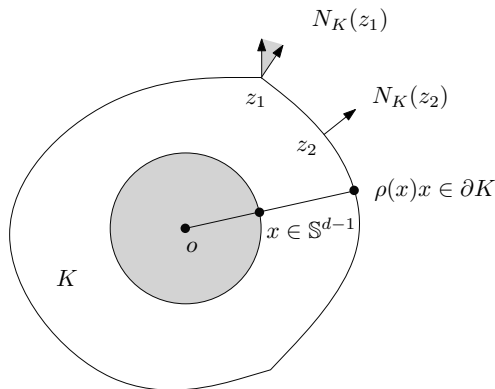


图: 给定一个凸集 $K \ni 0$, 我们用极坐标来参数化它的边界, 极坐标用映射 $\rho: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 来表示. 给定一个点 $z \in \partial K$, 集合 $N_K(z)$ 由所有在 z 处的外法向量构成. 当 K 在点 z 有唯一的切平面 (比如点 z_2), $N_K(z)$ 是独点集 (singleton). 如果 z 是一个角点, 则 $N_K(z)$ 包含多个元素 (比如 z_1).

定义 (Gauss 映射)

多值的 Gauss 映射 $G_K: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$, 定义如下:

$$G_K(x) := N_K(\rho(x)x).$$

定义 Gauss 曲率测度:

$$\mu_K(E) := \mathcal{H}^{d-1}(G_K(E)), \quad \forall \text{ Borel 集合 } E \subset \mathbb{S}^{d-1}.$$

其中 $\mathcal{H}^{d-1}$ 表示 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的 $d-1$ 维 Hausdorff 测度. □

可以证明 μ_K 是一个 Borel 测度.

问题 (Minkowski I)

在球面 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上给定一个 Borel 测度 ν , 我们能否找到一个有界开凸集 $K \ni 0$, 使得 $\nu = \mu_K$? □

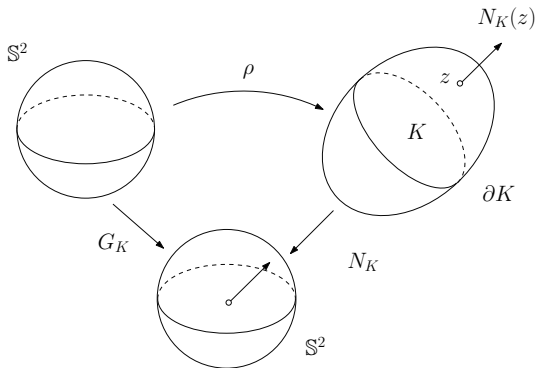


图: Minkowski 问题 I.

定义 (球面凸集和极集)

令球面子集 $\omega \subset \mathbb{S}^{d-1}$, 我们说 ω 是凸的, 如果锥

$$\mathbb{R}^+ \omega := \{tx : t > 0, x \in \omega\}$$

是凸的. 我们把 ω 极集 (polar set) 定义为

$$\omega^* := \{y \in \mathbb{S}^{d-1} : \langle x, y \rangle \leq 0, \forall x \in \omega\}. \quad \square$$

定理 (Minkowski I)

令 ν 为 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的一个 Borel 测度. 则存在有界凸域 K , 使得

$$\nu = \mu_K \iff \begin{cases} (a) \nu(\mathbb{S}^{d-1}) = \mathcal{H}^{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}); \\ (b) \nu(\mathbb{S}^{d-1} \setminus \omega) > \mathcal{H}^{d-1}(\omega^*), \forall \omega \subsetneq \mathbb{S}^{d-1} \text{ 是紧且凸的.} \end{cases}$$

此外, 若 K 存在, 则不同的解之间相差一个扩张 (dilation). $\square$

定理 (Minkowski 解的正则性)

设 $K \subset \mathbb{R}^3$ 是一个含有原点的有界开凸域, 假设 $\mu_K = f d\mathcal{H}^2$, 密度函数 $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ 有界, 则 ∂K 是 C^1 的. □

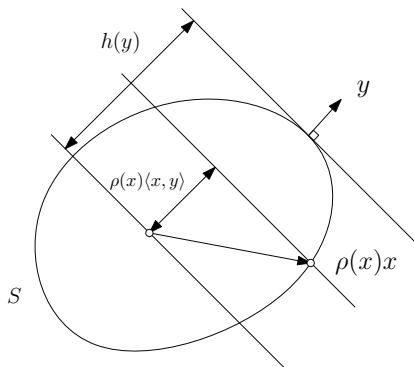


图: 广义 Legendre 变换, $h(y) = \max\{\rho(x)\langle x, y \rangle, x \in \mathbb{S}^{d-1}\}$.

定义 (球面 Legendre 对偶)

给定 $\mathbb{R}^d$ 中的一张凸超曲面, 其极坐标表示为 $S := \{\rho(x)x : x \in \mathbb{S}^{d-1}, \rho : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^+\}$, 其球面 Legendre 对偶为 $S^* := \{h(y)y : y \in \mathbb{S}^{d-1}, h : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^+\}$, 其中

$$h(y) := \sup_{x \in \mathbb{S}^{d-1}} \rho(x) \langle x, y \rangle. \quad (2)$$

对称地, $S = (S^*)^*$, 并且

$$\rho(x) = \inf_{y \in \mathbb{S}^{d-1}} \frac{h(y)}{\langle x, y \rangle}, \quad (3)$$

或者等价地,

$$\rho^{-1}(x) = \sup_{y \in \mathbb{S}^{d-1}} h^{-1}(y) \langle x, y \rangle. \quad \square$$

口诀

代价变换支撑，支撑包络势能；

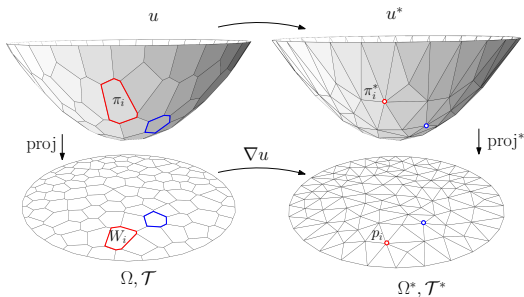


图: 欧氏空间的 Legendre 对偶.

口诀

势能微分映射；映射对偶凸形。

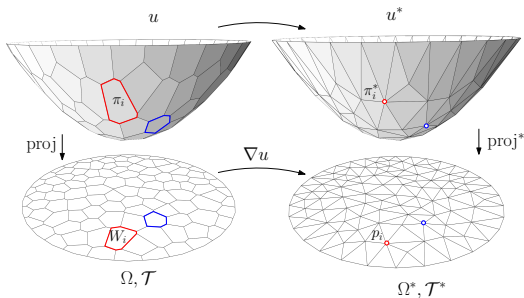


图: 欧氏空间的 Legendre 对偶. 支撑面 $\langle \mathbf{p}, x \rangle - h = 0$, 对偶点 $(\mathbf{p}, h)$.

口诀

支撑包络势能；势能微分映射，映射对偶凸形。

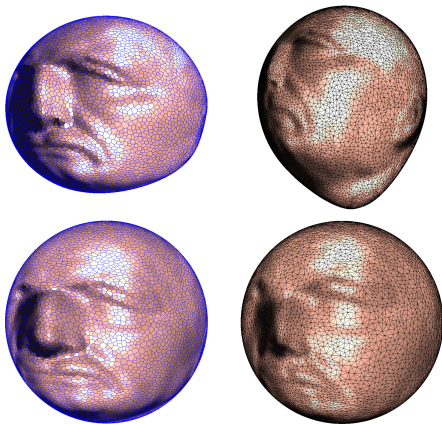


图: 球面的 Legendre 对偶. 支撑面 $\langle \rho(x), \mathbf{y} \rangle = h$, 对偶点 $h^{-1}\mathbf{y}$

球面 Legendre 对偶公式两边同取对数, 得到

$$\log \rho(x) = \inf_y \left\{ -\log \langle x, y \rangle - \log \frac{1}{h(y)} \right\}, \quad (4)$$

且

$$\log \frac{1}{h(y)} = \inf_x \{ -\log \langle x, y \rangle - \log \rho(x) \}. \quad (5)$$

我们可以定义损失函数 $c : \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$,

$$c(x, y) := -\log \langle x, y \rangle, \quad (6)$$

则上式表示 $\log \rho(x)$ 与 $-\log h(y)$ 互为对方的 c -变换:

$$(\log \rho(x))^c = \log \frac{1}{h(y)} \quad \text{和} \quad \left(\log \frac{1}{h(y)} \right)^{\bar{c}} = \log \rho(x).$$

证明.

Minkowski 问题 I 可以重新表述为最优传输问题: 在 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上给定 Borel 测度 ν , 找到一个最优传输映射

$$T: (\mathbb{S}^{d-1}, \mathcal{H}^{d-1}) \rightarrow (\mathbb{S}^{d-1}, \nu),$$

$$\min_{T_{\#} \mathcal{H}^{d-1} = \nu} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} -\log \langle x, T(x) \rangle d\mathcal{H}^{d-1}.$$

这等价于对偶问题:

$$\max \left\{ \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \varphi(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \varphi^c(y) d\nu(y), \quad \varphi \in c\text{-conv} \left(\mathbb{S}^{d-1} \right) \right\}.$$

代价函数 $-\log \langle x, y \rangle$ 是连续的, 球面 $\mathbb{S}^{d-1}$ 是一个紧度量空间, 所以根据 (DP) 定理, 存在一个解 $(\varphi, \varphi^c) = (\rho(x), 1/h(y))$. $\square$

假设 S 是一个光滑的严格凸曲面, 它的 Gauss 映射 $N_k : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ 是可逆的, 我们可以用 Gauss 球面来参数化曲面, 记为 $S(y)$, $y \in \mathbb{S}^2$. 曲面在 $S(y)$ 处的法向量为 y , Gauss 曲率为 $\mathcal{K}(y)$. Gauss 曲率满足条件:

$$\int_{\mathbb{S}^2} \frac{y}{\mathcal{K}(y)} dA_{\mathbb{S}^2}(y) = 0.$$

曲面的面元为:

$$d\nu = dA_S(y) = \frac{1}{\mathcal{K}(y)} dA_{\mathbb{S}^2}(y).$$

即 Gauss 映射将曲面面元 dA_S 推前到 Gauss 球面上的测度 ν , 密度为 $\mathcal{K}(y)^{-1}$.

问题 (Minkowski I)

给定球面上的测度 ν , 满足

$$\int_{\mathbb{S}^2} y d\nu(y) = \mathbf{0},$$

寻找凸曲面 $S(y)$, 使得 $d\nu$ 为曲面 S 的面元。设 ν 的密度函数为 $d\nu = \frac{1}{\kappa(y)} dA_{\mathbb{S}^2}$, 曲面在 $S(y)$ 点的法向量等于 y , Gauss 曲率等于 $\kappa(y)$ 。

在 Minkowski 问题 I 中, 曲面具有极坐标表示 $\rho(x)x$, $x \in \mathbb{S}^2$;
在 Minkowski 问题 I 中, 曲面被 Gauss 球面参数化, 即被法向量参数化。

我们可以通过 Dirac 分布和来近似测度 ν . 构造球面的一个胞腔分解 $\mathcal{T}$,

$$\mathbb{S}^2 = \bigcup_{i=1}^n W_i,$$

对每个 W_i , 计算向量

$$v_i = \int_{W_i} \frac{y}{\mathcal{K}(y)} dA_{\mathbb{S}^2},$$

令 $A_i = |v_i|$ 并且 $y_i = v_i/A_i$, 则基于 $\{(A_i, y_i)\}_{i=1}^n$, 求解离散 Minkowski 问题, 得到凸多面体 P , 其第 i 个面的法向量等于 y_i , 面积等于 A_i .

若构造胞腔分解序列 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_n, \dots$, 胞腔的直径均匀单调地趋于 0, 则存在相应的凸多面体序列 $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ 收敛于光滑凸曲面 S .

一个光照系统由位于 $\mathcal{O}$ 处的点光源和一个反射曲面 Γ 组成,

$$\Gamma_\rho = \{x\rho(x); x \in \Omega\}, \quad \rho > 0, \quad (7)$$

入射光线都落在输入域 Ω 中. 反射镜面将入射光线进行反射, 如果只考虑远场 (far field) 问题, 则可只关注反射光线的方向. 所有反射射线的方向都落在输出域 Ω^* 之中.

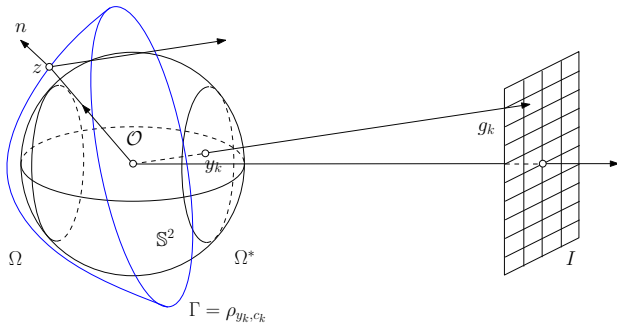




图: 左帧是初始的远场图像, Lena 相片; 右帧是计算模拟的反射图像.

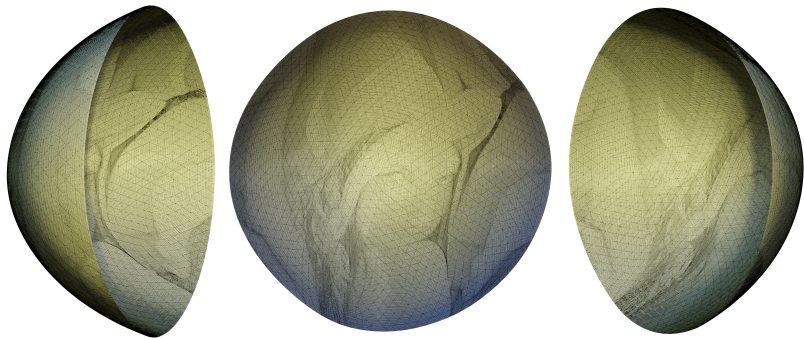


图: Lena 相片的反射曲面.



图: 左帧是初始的远场图像, Monge 相片; 右帧是计算模拟的反射图像.

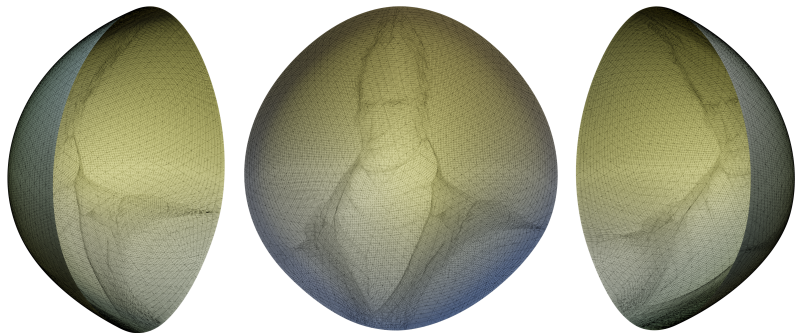


图: Monge 相片的反射曲面.

设 f 为输入域 Ω 的照明强度 (illumination), 即 $\mathcal{O}$ 中的射线分布, 设 g 是输出域 Ω^* 的照明强度. 假设反射过程中没有能量损失, 根据能量守恒定律, 我们有

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega^*} g. \quad (8)$$

令一条光线从光源出发, 沿着方向 $x \in \Omega$ 传播, 与镜面相交于点 $z = x\rho(x) \in \Gamma_\rho$, 则反射光线的方向由反射定律所决定,

$$T(x) = T_\rho(x) = \partial\rho(x) = x - 2\langle x, n \rangle n, \quad (9)$$

其中 n 是反射曲面 Γ_ρ 在点 z 处的外法向量, $\langle x, n \rangle$ 表示欧氏内积. 根据能量守恒定律, T 是保测度的映射, 即

$$\int_{T^{-1}(E)} f = \int_E g, \quad \forall \text{ Borel 集合 } E \subset \Omega^*. \quad (10)$$

满足自然的边界条件是

$$T_\rho(\Omega) = \partial\rho(\Omega) = \Omega^*. \quad (11)$$

由保测度条件, 我们可以获得反射系统的偏微分方程. 实际上, 在 $x \in \Omega$ 处, 映射 T 的 Jacobi 行列式等于 $f(x)/g(T(x))$, 在 $\mathbb{S}^2$ 上的一个局部正交坐标系中, 得出方程的局部表示

$$\mathcal{L}\rho = \eta^{-2} \det(-\nabla_i \nabla_j \rho + 2\rho^{-1} \nabla_i \rho \nabla_j \rho + (\rho - \eta) \delta_{ij}) = f(x)/g(T(x)), \quad (12)$$

这里 ∇ 是协变量导数, $\eta = (|\nabla \rho|^2 + \rho^2)/2\rho$, 且 δ_{ij} 是 Kronecker 函数. 这是一个极度复杂、完全非线性的 Monge-Ampère 型偏微分方程, 一个自然的边界条件是

$$T_\rho(\Omega) = \partial\rho(\Omega) = \Omega^*. \quad (13)$$

问题 (反射曲面设计)

给定球面区域 Ω , $\Omega^* \subset \mathbb{S}^2$, 以及密度函数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ 和 $g: \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}_+$, 找到反射曲面 Γ_ρ , 以使反射映射 T_ρ 满足保测度条件和自然边界条件. $\square$

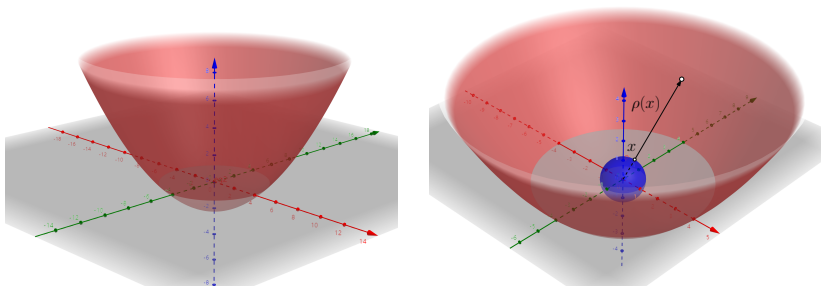


图: 抛物面的径向表示为 $\rho(x) = C/(1 - \langle x, y \rangle)$, 其中 y 为轴方向.

旋转抛物面的反射特性: 进入旋转抛物面的光线, 如果平行于旋转轴, 则都被反射到焦点, 反之亦然.

定义 (支撑抛物面)

令 $\rho \in C(\Omega)$ 是正函数, $\Gamma_\rho = \{x\rho(x) : x \in \Omega\}$ 表示 ρ 的径向图. 我们称 Γ_p 是 ρ 在 $x_0\rho(x_0) \in \Gamma_\rho$ 点的一个支撑抛物面, 其中 $p = p_{y,C}$, 如果有

$$\begin{cases} \rho(x_0) = p_{y,C}(x_0), \\ \rho(x) \leq p_{y,C}(x), \quad \forall x \in \Omega. \end{cases} \quad \blacklozenge \quad (14)$$

定义 (可容许函数)

称 ρ 是可容许函数 (admissible function), 如果在其径向图 Γ_ρ 的任意点处都有支撑抛物面. $\square$

定义 (次微分)

令 ρ 为可容许函数, 次微分 (subdifferential) 是一个集值映射 $\partial\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$: 对于任意 $x_0 \in \Omega$, $\partial\rho(x_0)$ 是这样的点 y_0 的集合, 使得存在某个正数 $C > 0$, $p_{y_0, C}$ 是 ρ 在点 x_0 的支撑抛物面,

$$\partial\rho(x) = \{y \in \Omega^* : \exists C > 0 \text{ 使得抛物面 } p_{y, C} \text{ 在点 } x \text{ 处支撑 } \rho\}. \quad \square$$

定义 (广义 Alexandrov 测度)

通过次微分映射 $\partial\rho$, 我们引入 Ω 中的测度 $\mu = \mu_{\rho, g}$, 其中 $g \in L^1(\mathbb{S}^2)$ 是球面上的非负可测函数, 使得对于任何 Borel 集 $E \subset \Omega$,

$$\mu_{\rho, g}(E) = \int_{\partial\rho(E)} g(x) dx. \quad (15)$$

定义 (广义解)

可容许的函数 ρ 称为反射系统球面 Monge-Ampère 方程的广义解, 如果作为测度

$$\mu_{\rho,g} = f dx.$$

等价地, 对于任意的 Borel 集 $E \subset \Omega$, 都有

$$\int_E f = \int_{\partial\rho(E)} g. \quad (16)$$

进一步, 若 ρ 满足

$$\Omega^* \subset \partial\rho(\Omega), \quad |\{x \in \Omega : f(x) > 0 \text{ 且 } \partial\rho(x) - \overline{\Omega^*} \neq \emptyset\}| = 0, \quad (17)$$

则 ρ 是具自然边界条件 $T_\rho(\Omega) = \Omega^*$ 的球面 Monge-Ampère 方程 $\mathcal{L}\rho = f/g \circ T$ 的广义解. $\square$

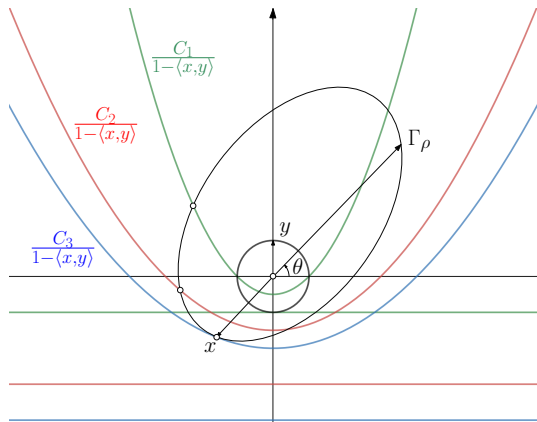


图: 广义 Legendre 变换.

设 ρ 是可容许的, 固定一个方向 $y \in \mathbb{S}^2$, 存在一个支撑抛物面以 y 为轴方向, 表示为 $p_{y,c}$. 也就是说, 抛物面的径向表示为 $\frac{c}{1-\langle x,y \rangle}$, 且在 $\rho(x)x$ 处支撑 Γ_ρ . 那么如图所示, 对于任意轴向为 y 、与 Γ_ρ 相交的抛物线 $p_{y,\tilde{c}}$, 我们都有 $\tilde{c} \leq c$.

设 Γ_ρ 与抛物面 $p_{y,\tilde{c}}$ 在 $\rho(x)x$ 处相交, 则我们有 $\rho(x) = \frac{\tilde{c}}{1-\langle x,y \rangle}$, $\tilde{c} = \rho(x)(1 - \langle x, y \rangle)$. 因此我们得到

$$c(y) = \sup_{x \in \Omega} \rho(x)(1 - \langle x, y \rangle) \iff \frac{1}{c(y)} = \inf_{x \in \Omega} \frac{1}{\rho(x)(1 - \langle x, y \rangle)},$$

我们将其表示为 $\eta : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\eta(y) = 1/c(y)$.

定义 (广义 Legendre 变换)

假设 ρ 是 Ω 的可容许函数, ρ 关于函数 $\frac{1}{1-\langle x, y \rangle}$ 的广义 Legendre 变换 (generalized Legendre transform) 是定义在 $\mathbb{S}^2$ 上的函数 η ,

$$\eta(y) = \inf_{x \in \Omega} \frac{1}{\rho(x)(1 - \langle x, y \rangle)}. \quad \blacklozenge \quad (18)$$

对于任意固定的 $y_0 \in \Omega^*$, 令其下确界在点 $x_0 \in \Omega$ 处取得, 由此有

$$\eta(y_0)\rho(x_0) = \frac{1}{1 - \langle x_0, y_0 \rangle}, \quad (19)$$

对于一般的 $x \in \Omega$ 和 $y \in \Omega^*$,

$$\rho(x)\eta(y) \leq \frac{1}{1 - \langle x, y \rangle}, \quad (20)$$

并且我们知道 $p_{y_0, C}(x) = \frac{C}{1 - \langle x, y_0 \rangle}$ 是 ρ 位于 x_0 处的支撑抛物面, $p_{x_0, C}(y) = \frac{C}{1 - \langle x_0, y \rangle}$ 是 η 在点 y_0 处的支撑抛物面.

进一步得到:

$$y_0 \in \partial\rho(x_0) \iff x_0 \in \partial\eta(y_0).$$

特别地, 当 η 的广义 Legendre 变换限制在 Ω 上时, 就是 ρ 自身,

$$\rho^{**} = \rho.$$

更进一步, 如果 ρ 光滑且满足 Monge-Ampère 方程 (12), 则次微分映射 $\partial\eta$ 是 $\partial\rho$ 的逆映射. 因此, η 满足方程

$$\mathcal{L}\rho = \frac{f(x)}{g(\partial\rho(x))}, \quad \mathcal{L}\eta = \frac{g(y)}{f(\partial\eta(x))}, \quad (21)$$

定理 (反射曲面设计问题解的存在唯一性)

假设 Ω 和 Ω^* 分别是包含在北半球和南半球中的连通域, f 和 g 是有界正函数, $\int_{\Omega} f(x) = \int_{\Omega^*}$, 那么存在一对函数 (φ_1, ψ_1) 极大化下述能量,

$$\sup \left\{ \int_{\Omega} \varphi(x) f(x) dx + \int_{\Omega^*} \psi(y) g(y) dy, \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y) \right\}, \quad (22)$$

其中

$$c(x, y) = -\log(1 - \langle x, y \rangle), \quad (23)$$

$\langle x, y \rangle$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的内积, 使得 $\rho_1 = e^{\varphi_1}$ 是满足自然边界条件 $\partial \rho_1(\Omega) = \Omega^*$ 的球面 Monge-Ampère 方程 $\mathcal{L}\rho_1 = f/g \circ \partial \rho_1$ 的解, 并且所有这样的解 ϕ_1 彼此相差一个常数. $\square$

证明.

反射曲面设计问题是一个最优传输问题, 根据对偶问题 (DP) 解的存在唯一性定理, 我们得到存在 Kantorovich 势能函数对 (φ, ψ) , $\psi = \varphi^c$, $\varphi = \psi^c$, 并且 φ 在相差一个常数的意义下唯一。令 $x_0 \in \Omega$ 是 φ 的可微点, 令 $y_0 \in \overline{\Omega_*}$, 使得

$$\begin{cases} \varphi(x_0) &= c(x_0, y_0) - \psi(y_0) \\ \varphi(x) &\leq c(x, y_0) - \psi(y_0), \quad \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

这时, $\rho = e^\varphi$, 抛物面

$$p(x) = \exp(c(x, y_0) - \psi(y_0)) = \frac{C}{1 - \langle x, y_0 \rangle}, \quad C = \exp(-\psi(y_0)).$$

那么 $p(x)$ 在 x_0 点处支撑 Γ_ρ 。



证明.

Γ_ρ 是支撑抛物面的内包络, ρ 几乎处处可微。注意, 在 ρ 的可微点上, 支撑抛物面是唯一的, 因此 y_0 是唯一的. 因此, 最优传输方案这时成为最优传输映射 $T_\rho: \Omega \rightarrow \Omega^*$ 。

抛物面 $p(x)$ 和 Γ_ρ 在切点处法向量相同, 由抛物面的反射特性, 我们有

$$y_0 = T_\rho(x_0) = T_p(x_0) = x_0 - 2\langle x_0, n \rangle n.$$

因为 T_ρ 保测度, 满足球面 Monge-Ampère 方程, $\mathcal{L}\rho = f/g \circ \partial\rho$, 并且满足边界条件 $T_\rho(\Omega) = \Omega^*$. $\square$

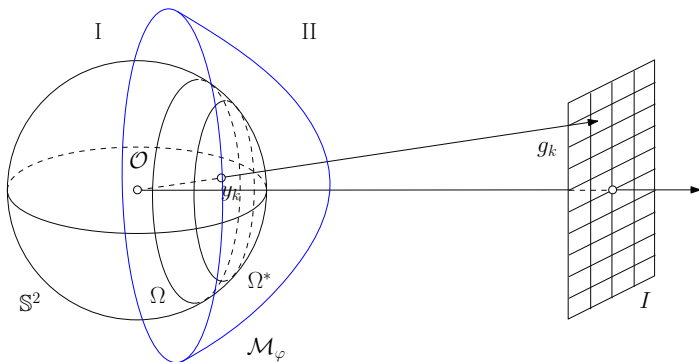


图: 折射系统的设置.

设 n_1 和 n_2 分别为两种均匀、各向同性介质 I 和 II 的折射率. 假设从介质 I 中的点 $\mathcal{O}$ 发出强度为 $f(x)$ 的光, 沿着方向 $x \in \Omega \subset \mathbb{S}^2$. 如图所示, 我们希望构造一个具有径向表示的折射曲面 Γ_ρ ,

$$\Gamma_\rho = \{x\rho(x); x \in \Omega\}, \quad \rho > 0, \quad (24)$$

Γ_ρ 分离介质 I 和 II, 使得所有被 Γ_ρ 折射到介质 II 中的光线方向都落在 $\Omega^* \subset \mathbb{R}^2$ 中, 并且沿着方向 $y \in \Omega^*$ 的光线照明强度等于 $g(y)$, 这里球面函数 $g: \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ 被事先规定.

假设折射中没有能量损失, 则根据能量守恒定律,

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega^*} g(y) dy. \quad (25)$$

从 $\mathcal{O}$ 出发到达点 $x\rho(x) \in \Gamma_{\rho}$ 的射线, 这里 $x \in \Omega$, 其折射射线的方向为

$$T(x) = T_{\rho}(x) = \partial\rho(x). \quad (26)$$

根据能量守恒, T 是保测度映射, 即

$$\int_{T^{-1}(E)} f(x) dx = \int_E g(y) dy, \quad \forall \text{ Borel 集 } E \subset \Omega^*, \quad (27)$$

具有自然边界条件

$$T_{\rho}(\Omega) = \partial\rho(\Omega) = \Omega^*. \quad (28)$$

问题 (设计折射镜面)

令 n_1 和 n_2 分别为两种均质和各向同性介质 I 和 II 的折射率.
给定球面区域 $\Omega, \Omega^* \subset \mathbb{S}^2$, 密度函数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ 和
 $g: \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}_+$, 找到折射镜表面 Γ_ρ , 将两种介质分开, 这样折射映射 T_ρ (26) 满足保测度条件 (27) 和边界条件 (28). $\square$

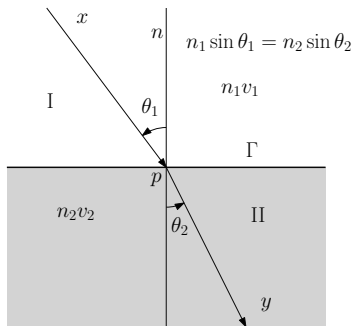


图: Snell 折射定律.

v_1 和 v_2 是介质 I 和 II 中的光速, $n_1 = c/v_1$, $n_2 = c/v_2$ 为折射指数. 如果一束方向为 $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ 的光线穿过介质 I 在点 p 处命中 Γ , 折射进入介质 II, 折射射线的方向为 $y \in \mathbb{S}^{n-1}$, 则 Snell 定律断言

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2,$$

这里 θ_1 是入射角, θ_2 是折射角, 而 n 是 Γ 在 p 处的法向单位, 指向介质 II. 向量 x , n 和 y 是共面的.

定义 (具有均匀折射特性的曲面)

曲面使从点 O 发出的所有光线都折射到某个固定方向。

$\kappa = n_2/n_1$, 当 $\kappa < 1$, 由于折射的物理约束, 半椭球面 $e_{y,b}$ 由下式给出

$$e_{y,b} = \left\{ \rho(x)x : \rho(x) = \frac{b}{1 - \kappa \langle y, x \rangle}, x \in \mathbb{S}^{n-1}, \langle x, y \rangle \geq \kappa \right\}. \quad (29)$$

当 $\kappa > 1$. 由于折射的物理约束, 双叶旋转双曲面的一叶,

$$h_{y,b} = \left\{ \rho(x)x : \rho(x) = \frac{b}{\kappa \langle y, x \rangle - 1}, x \in \mathbb{S}^{n-1}, \langle x, y \rangle \geq 1/\kappa \right\}. \quad (30)$$

引理

设 n_1 和 n_2 分别是两种介质 I 和 II 的折射率, 并且 $\kappa = n_2/n_1$. 假设原点 O 在介质 I 内, 而 $e_{y,b}$, $h_{y,b}$ 分别由 (29) 和 (30) 所定义, 我们有:

如果 $\kappa < 1$ 并且 $e_{y,b}$ 是两种介质 I 和 II 的界面, $e_{y,b}$ 将所有从 O 发出的光线折射进入介质 II , 折射为方向 y .

如果 $\kappa > 1$ 并且 $h_{y,b}$ 是两种介质 I 和 II 的界面, $h_{y,b}$ 将所有从 O 发出的光线折射进入介质 II , 折射为方向 y . □

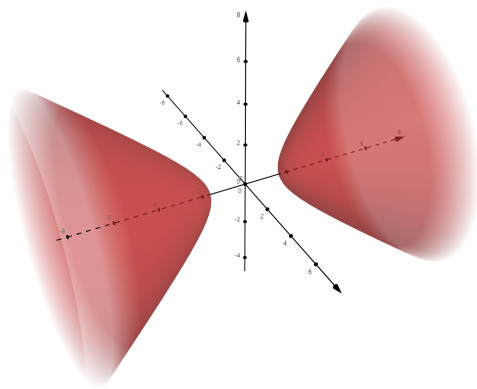


图: 双叶双曲面。

定义 (支撑椭球面)

令 $\rho \in C(\Omega)$ 为正函数, 并令 $\Gamma_\rho = \{x\rho(x) : x \in \Omega\}$ 表示 ρ 的径向图. 令 $e = e_{y,c}$ 是一个旋转椭球面, 其径向图为 Γ_e . 如果我们有

$$\begin{cases} \rho(x_0) = e_{y,c}(x_0), \\ \rho(x) \leq e_{y,c}(x), \quad \forall x \in \Omega, \end{cases} \quad (31)$$

则称 Γ_e 是 ρ 在点 $x_0\rho(x_0) \in \Gamma_\rho$ 处的支撑椭球面. 如果径向图 Γ_ρ 在任意点处都有支撑椭球面, 则称 ρ 是可容许的.

定义 (次微分)

令 ρ 为可容许函数. 我们定义一个集值映射 $\partial\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$, 即所谓的次微分. 对于任意 $x_0 \in \Omega$, $\partial\rho(x_0)$ 是这样的点 y_0 的集合, 使得存在 $c > 0$, $e_{y_0,c}$ 是 ρ 在点 x_0 处的支撑椭球面.

对任意子集 $E \subset \Omega$, 我们定义 $\partial\rho(E) = \bigcup_{x \in E} \partial\rho(x)$.

设 $g \in L^1(\mathbb{S}^2)$ 是非负的可测函数, 定义测度 $\mu = \mu_{\rho, g}$, 使得

$$\mu_{\rho, g}(E) = \int_{\partial\rho(E)} g(x) dx, \quad \forall \text{ Borel } E \subset \Omega \quad (32)$$

定义 (广义解)

可容许函数 ρ , 如果作为测度 $\mu_{\rho, g} = f dx$, 则

$$\int_E f = \int_{\partial\rho(E)} g, \quad \forall \text{ Borel } E \subset \Omega \quad (33)$$

更进一步, 如果 ρ 还满足

$$\Omega^* \subset \partial\rho(\Omega), \quad |\{x \in \Omega : f(x) > 0 \text{ 且 } \partial\rho(x) - \overline{\Omega^*} \neq \emptyset\}| = 0, \quad (34)$$

则称 ρ 是具有自然边界条件的球面蒙日-安培方程的广义解. $\square$

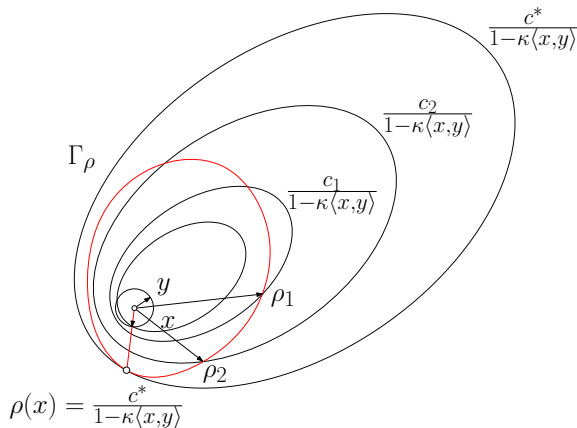


图: 广义 Legendre 变换.

在所有以 y 为轴向, 且与 Γ_ρ 相交的椭球面 $e_{y,c}$ 中, $c \leq c^*$. 假设 Γ_ρ 与椭球面 $e_{y,c}$ 相交, 则在交点处我们有 $\rho(x) = \frac{c}{1-\kappa\langle x, y \rangle}$, $c = \rho(x)(1 - \kappa\langle x, y \rangle)$, 因此我们得到

$$c^*(y) = \sup_{x \in \Omega} \rho(x)(1 - \kappa\langle x, y \rangle) \iff \frac{1}{c^*(y)} = \inf_{x \in \Omega} \frac{1}{\rho(x)(1 - \kappa\langle x, y \rangle)}.$$

$1/c^*(y)$ 是 y 的函数, 我们将其记作 $\eta : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}_+$.

定义 (广义 Legendre 变换)

设 ρ 是定义在 Ω 上的可容许函数. ρ 关于函数 $\frac{1}{1-\kappa\langle x, y \rangle}$ 的广义 Legendre 变换是定义在 $\mathbb{S}^2$ 上的函数 η , 由下式给出

$$\eta(y) = \inf_{x \in \Omega} \frac{1}{\rho(x)(1 - \kappa\langle x, y \rangle)}. \quad \blacklozenge \quad (35)$$

记 $\Omega^* = \partial\rho(\Omega)$. 对于任何固定的 $y_0 \in \Omega^*$, 令 (35) 在 $x_0 \in \Omega$ 达到最小值, 则

$$\eta(y_0)\rho(x_0) = \frac{1}{1 - \kappa\langle x_0, y_0 \rangle}, \quad (36)$$

对一般条件下的 $x \in \Omega$ 和 $y \in \Omega^*$,

$$\rho(x)\eta(y) \leq \frac{1}{1 - \kappa\langle x, y \rangle}. \quad (37)$$

我们有

$$y_0 \in \partial\rho(x_0) \iff x_0 \in \partial\eta(y_0).$$

特别地, η 的广义 Legendre 变换, 限制在 Ω 之上时, 又是 ρ 自身,

$$\eta^{**} = \eta, \quad \rho^{**} = \rho.$$

$$\partial\eta^{-1} = \partial\rho, \quad \partial\rho^{-1} = \partial\eta$$

定理

设 Ω 和 Ω^* 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 中的两个区域, 则发射光束的照明强度由在 Ω 上的正有界函数 $f(x)$ 给出, 折射光束的规定照明强度由 $\overline{\Omega^*}$ 上的正有界函数 $g(y)$ 给出. 假设 $|\partial\Omega| = 0$ 并且满足物理约束

$$\inf_{x \in \Omega, y \in \Omega^*} \langle x, y \rangle \geq \kappa. \quad (38)$$

进一步, 假设总能量守恒

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega^*} g(y) dy > 0, \quad (39)$$

其中 dx, dy 表示 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的曲面测度. 那么, 存在一个弱解 Γ_{ρ} , 对 $\kappa < 1$ 具有发射照明强度 $f(x)$ 和规定的折射照明强度 $g(y)$. 这样的解 Γ_{ρ} 彼此相差一个相似变换. □

证明.

由最优传输理论的对偶问题, 可以证明存在一对函数 (ϕ_1, ψ_1) , 在相差一个常数的意义下唯一, 最大化如下问题

$$\sup\{I(u, v) : (u, v) \in K\},$$

其中

$$I(u, v) = \int_{\Omega} f(x) u(x) dx + \int_{\Omega^*} v(y) g(y) dy,$$

$$K = \{(u, v) \in (C(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega^*})) : u(x) + v(y) \leq c(x, y), \forall x \in \Omega, y \in \Omega^*\},$$

$$c(x, y) = -\log(1 - \kappa \langle x, y \rangle),$$

这里 $\langle x, y \rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的内积, 使得 $\rho_1 = e^{\phi_1}$ 是具有自然边界条件的蒙日-安培方程的解. □

定理

设 Ω 和 Ω^* 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的两个区域, 则发射光束的照明强度由在 Ω 上的正有界函数 $f(x)$ 给出. 折射光束的规定照明强度由在 $\overline{\Omega^*}$ 上的正有界函数 $g(y)$ 给出. 假设 $|\partial\Omega| = 0$ 并且满足物理约束

$$\inf_{x \in \Omega, y \in \Omega^*} \langle x, y \rangle \geq \frac{1}{\kappa}. \quad (40)$$

进一步, 假设总能量守恒

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega^*} g(y) dy > 0, \quad (41)$$

其中 dx, dy 表示 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的曲面测度. 那么存在一个弱解 Γ_{ρ} , 对于 $\kappa > 1$ 具有发射照明强度 $f(x)$ 和规定的折射照明强度 $g(y)$. 这样的解 Γ_{ρ} 彼此相差一个相似变换. □

该证明类似于 $\kappa < 1$ 的情况, 但是代价函数被修改为

$$c(x, y) = -\log(\kappa \langle x, y \rangle - 1). \quad (42)$$

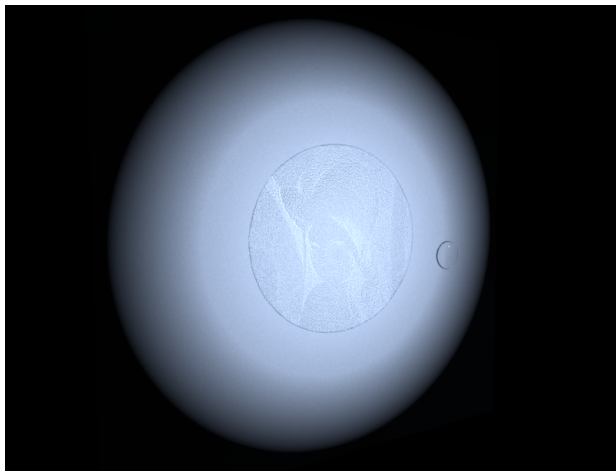


图: 基于最优传输的折射透镜设计。

1. 保面积参数化;
2. Minkowski 问题 I;
3. 折射透镜设计 $\kappa < 1$;
4. 折射透镜设计 $\kappa > 1$;

源测度 (Ω, μ) , 目标测度 (Ω^*, ν) , 代价函数 $c(x, y)$, Kantorovich 势能函数 (φ, ψ) , 密度函数 $d\mu(x) = f(x)dx$, $d\nu(y) = g(y)dy$,

$$\sup \left\{ \int_{\Omega} \varphi f + \int_{\Omega^*} \psi g : \varphi \oplus \psi \leq c \right\}$$

$$\psi(y) = \varphi^c, \quad \varphi(x) = \psi^{\bar{c}}$$

	代价 $c(x, y)$	支撑 $c(x, y) - \psi(y)$	势能 $\varphi = \inf_y c(x, y) - \psi(y)$
1	$\langle x, y \rangle$	$\langle x, y \rangle - \psi(y)$	$\varphi(x) = \sup_y \langle x, y \rangle - \psi(y)$
2	$-\log \langle x, y \rangle$	$\frac{e^{-\psi(y)}}{\langle x, y \rangle}$	$\rho(x) = e^{\varphi(x)} = \inf_y \frac{e^{-\psi(y)}}{\langle x, y \rangle}$
3	$-\log(1 - \kappa \langle x, y \rangle)$	$\frac{e^{-\psi(y)}}{1 - \kappa \langle x, y \rangle}$	$\rho(x) = e^{\varphi(x)} = \inf_y \frac{e^{-\psi(y)}}{1 - \kappa \langle x, y \rangle}$
4	$-\log(\kappa \langle x, y \rangle - 1)$	$\frac{e^{-\psi(y)}}{\kappa \langle x, y \rangle - 1}$	$\rho(x) = e^{\varphi(x)} = \inf_y \frac{e^{-\psi(y)}}{\kappa \langle x, y \rangle - 1}$

	映射 $\nabla_x c(x, T(x)) = \nabla \varphi(x)$	支撑 $c(x, y) - \psi(y)$	Legendre 对偶 $\psi(y) = \inf_x c(x, y) - \varphi(x)$
1	$T(x) = \nabla \varphi(x)$	平面	$\psi(y) = \sup_x \langle x, y \rangle - \varphi(x)$
2	$T(x) = n(x)$	平面	$\eta(y) = e^{\psi(y)} = \inf_x \frac{e^{-\varphi(x)}}{\langle x, y \rangle}$
3	$n(x) = \frac{x - \kappa T(x)}{ x - \kappa T(x) }$	旋转椭球面	$\eta(y) = e^{\psi(y)} = \inf_x \frac{e^{-\varphi(x)}}{1 - \kappa \langle x, y \rangle}$
4	$n(x) = \frac{x - \kappa T(x)}{ x - \kappa T(x) }$	旋转双叶双曲面	$\eta(y) = e^{\psi(y)} = \inf_x \frac{e^{-\varphi(x)}}{\kappa \langle x, y \rangle - 1}$

更多的信息，请联系 gu@cs.stonybrook.edu

谢谢!